KÜLÖNLENYOMAT

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
III. (MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI) OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEIBŐL

XII. KÖTET 4. SZÁM

ARATÓ MÁTYÁS

NÉHÁNY ÚJABB EREDMÉNY AZ ERGOD-ELMÉLETBEN

1962

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI:
CSÁSZÁR ÁKOS, DETRE LÁSZLÓ, GYULAI ZOLTÁN, HAJÓS GYÖRGY, NOVOBÁTZKY KÁROLY, RÉNYI ALFRÉD, TURÁN PÁL

FŐSZERKESZTŐ:
ALEXITS GYÖRGY

XII. kötet 4. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.
Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

NÉHÁNY ÚJABB EREDMÉNY AZ ERGOD-ELMÉLETBEN*

Írta: ARATÓ MÁTYÁS

Ergod-elméletnek, vagy más néven a dinamikus rendszerek metrikus elméletének, amint azt a mai orosz nyelvű szakirodalomban nevezik, első igen viharos korszaka a funkcionálanalízis módszereinek a felhasználásával a harmincas és negyvenes években zajlott le. Ennek a korszaknak kiemelkedő egyéniségei közé tartozik a magyar matematikusok közül RIESZ FRIGYES és a magyar származású NEUMANN JÁNOS. Ezen első korszak eredményeinek összefoglalása megtalálható HALMOS [6] könyvében és ROHLIN [5] cikkében. Az említett periódus fő eredményei közé tartoznak a dinamikus rendszerek spektrál invariánsai fogalmának a bevezetése, a spektrum és ergodikusság, valamint a keverés kapcsolatának a tisztázása, tetszőleges dinamikus rendszernek ergodikus komponensekre való felbontása, általános ergodikus tételének bizonyítása. Mivel a funkcionálanalízis módszerei kimerültek és újak nem jelentek meg körülbelül 15 éven át, bizonyos egy helyben topogás jellemezte ezt az igen szép, de nehéz elméletet.

Újabb fellendülés a dinamikus rendszerek elméletében A. N. KOLMOGOROV 1958-ban megjelent munkái [1], [2] után volt tapasztalható, aki a nagy fejlődésnek indult információelmélet segítségével egy sor jelentős új fogalmat vezetett be. Így például a dinamikus rendszer entrópiájának a fogalmát, melynek segítségével sikerült példákat szerkeszteni olyan nem izomorf dinamikus rendszerekre, melyek spektruma megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* típusú. Ide tartozik a kvázireguláris dinamikus rendszerek fogalma, melyeket ROHLIN *Kolmogorov*-féle rendszereknek, míg SZINAJ egyszerűen K-rendszereknek nevez. Ez a fogalom megvilágítja az ergod-elmélet és a valószínűségszámítású szoros kapcsolatát is. A továbbiakban hol rendszerről (ezen egy T automorfizmusú dinamikus rendszert értünk), hol pedig egyszerűen automorfizmusról fogunk beszélni.

A K-rendszerek lényegében a reguláris stacionárius folyamatok, azaz információ átadásra képes folyamatok általánosításai. Azonban a K-rendszerek tanulmányozása túlmegy a valószínűségszámítás keretein.

A legújabb eredmények rendszeres tárgyalása megtalálható ROHLIN világos stílusú összefoglaló munkájában, melynek magyar nyelvű fordítása a III. Osztály Közleményeinek ebben a számában található meg. Ez lehetővé teszi, hogy a szükséges fogalmakat és jelöléseket ne magyarázzuk meg külön.

Már az a tény, hogy az Uszpehi Matematicseszkih Naukban összefoglaló cikk jelent meg ezekről a kutatásokról, melyek azóta is elsősorban a Szovjetunióban folynak, elegendő lenne arra, hogy felfigyeljenek ezekre a problémákra nálunk is, ahol ezen a téren komoly hagyományokkal rendelkeznek a magyar matematika művelői. Az a

* Ez a cikk a MTA III. Osztály Közleményei ugyanezen számában A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOM részben megjelent V. A. ROHLIN: Új fejlődés a mértéktartó leképezések elméletében c. cikkhez kíván további adalékokat szolgáltatni.

reakció, mely a Szovjetunión kívül tapasztalható (lásd pl. HALMOS [1*] cikkét), arra enged következtetni, hogy hamarosan más helyeken is bekapcsolódnak az ilyen irányú kutatásokba. ROHLIN összefoglalójának megjelenése óta több olyan cikk is megjelent, melyek részletes bizonyításokat tartalmaznak és ezért különösen ajánlható mindazoknak, akik nemcsak az elért eredményekkel, de a bizonyítási módszerekkel is szeretnének megismerkedni (pl. ROHLIN [16] SZINAJ [5*] ABRAMOV, ROHLIN [7*]). Figyelmemet erre a problémakörre JA. G. SZINAJ hívta fel, aki nagymértékben segítségemre volt az elmélet és annak lényeges problémái megértésében. Ezúton is köszönetemet fejezem ki segítségéért.

Ebben a cikkben azokkal az újabb eredményekkel kívánok foglalkozni, melyeket a legutóbbi időben értek el. ROHLIN cikkének végén felsorolt problémák helyes útmutatóknak bizonyultak, egy részüket már megoldották, másik részüknél pedig komoly előrehaladás mutatkozik. A dinamikus rendszerek elméletéből mind Moszkvában (SZINAJ vezetésével), mind Leningrádban (ROHLIN vezetésével) folyik szeminárium.

1. Az izomorfizmus problémája. Jelenleg a következő metrikus invariánsok ismeretesek: A *Neumann* által bevezetett *spektrál invariáns*, az *entrópia* és végül a *Kolmogorov-féle automorfizmus* vagy *K-rendszer* (KOLMOGOROV „kvázireguláris" automorfizmusnak nevezte őket). Ezek az invariánsok nem függetlenek, mert pl. a *K*-rendszer megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* spektrummal rendelkezik. A dinamikus rendszerek alapvető problémája az izomorfizmus problémája. ROHLIN cikke óta a következő előrehaladás történt. SZINAJ bevezette a *gyenge izomorfizmus* fogalmát (még nem publikált), melynek segítségével bebizonyította, hogy azonos entrópiájú *K*-rendszerek a gyenge izomorfizmus értelmében azonos típusúak. Így pl. a *Bernoulli* rendszerek gyengén izomorfak, ha entrópiájuk megegyezik. Ennek megértéséhez szükség van a következő definíciókra.

Az M_1 Lebesgue tér T_1 automorfizmusa *homomorf* az M_2 Lebesgue tér T automorfizmusával, ha az M_1 térnek van oly U homomorfizmusa az M térre, hogy

$$T_1 U = UT.$$

Ha U izomorfizmus, akkor a T és T_1 automorfizmusok izomorfak metrikus értelemben.

A T és T_1 automorfizmusokat *gyengén izomorfaknak* nevezzük, ha T homomorf a T_1 és T_1 homomorf a T automorfizmussal.

Könnyen belátható, hogy diszkrét spektrumú automorfizmusokra a gyenge és erős izomorfizmus fogalma egybeesik.

2. A Kolmogorov-féle automorfizmusok és a teljesen pozitív entrópiájú automorfizmusok. ROHLIN és SZINAJ [6*] bebizonyították, hogy a teljesen pozitív entrópiájú automorfizmusok osztálya megegyezik a *K*-automorfizmusok osztályával. Ebből következik: *K*-automorfizmus faktor automorfizmusa szintén *K*-automorfizmus, *K*-automorfizmus inverze szintén *K*-automorfizmus, stacionárius *Gauss* folyamat által származtatott automorfizmus *K*-automorfizmus, ha a folyamat spektruma abszolút folytonos.

Nem ismeretes azonban, hogy folyamatokra egybeesik-e a két fogalom, tehát a *K*-folyamat és a teljesen pozitív entrópiájú folyamat fogalma.

3. Kompakt kommutatív csoportok automorfizmusai. ROHLIN [2*] cikkében bebizonyította, hogy nemtriviális kompakt kommutatív csoport tetszőleges ergodikus automorfizmusa pozitív entrópiájú.

GENISZ [4*] bizonyította be, hogy a véges dimenziós tórus ergodikus T automorfizmusának entrópiája

$$h(T) = \sum_{i=1}^{k} \log |\lambda_i|,$$

ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ a T automorfizmust a tórus ciklikus koordinátáiban megadó egész számokból álló mátrix egynél nagyobb abszolút értékű sajátértékei (különböző sajátértékek esetén ezt az összefüggést SZINAJ bizonyította). Innen látható, hogy a tórus ergodikus automorfizmusának entrópiája pozitív.

4. A ferde szorzat entrópiája. A probléma teljes megoldása megtalálható ABRAMOV és ROHLIN közös [7*] cikkében. Bebizonyították, ha U az S bázisú és $T_x\,(x \in X)$ rétegződésű endomorfizmusok ferde szorzata

$$h(U) = h(S) + h_s(\mathbf{T}),$$

ahol a $h_s(\mathbf{T})$ mennyiséget nevezik a rétegek kevert entrópiájának.

A kevert entrópia értelmezése a következő. Legyen $M = X \times Y$ a μ_X és μ_Y mértékű X és Y terek direkt szorzata. S az X tér endomorfizmusa, $\mathbf{T} = \{T_x, x \in X\}$ az Y tér endomorfizmusainak egy serege. Tetszőleges $\eta \in Z(Y)$ felbontásra legyen

$$\eta_x^n = \prod_{k=0}^{n-1} T_x^{-1} T_{Sx}^{-1} \ldots T_{S^{k-1}x}^{-1} \eta, \quad \eta_x = \prod_{k=0}^{\infty} T_x^{-1} T_{Sx}^{-1} \ldots T_{S^{k-1}x}^{-1} x$$

$$E_n(\eta) = \frac{1}{n} \int_X H(\eta_x^n)\, d\mu_x, \qquad h_s(\mathbf{T}, \eta) = \inf_n E_n(\eta)$$

és

$$h_s(\mathbf{T}) = \sup h_s(\mathbf{T}, \eta), \qquad (\eta \in Z(Y)).$$

A dinamikus rendszereknek a sztochasztikus folyamatok elméletével való kapcsolata a következőképpen világítható meg. Ismeretes, hogy az $\{S_t\}$ mérhető folyamatot *K*-folyamatnak nevezik, ha létezik az M Lebesgue-térnek olyan ζ° mérhető felbontása, melyre teljesülnek a következő feltételek:

1. $S_t \xi^0 = \xi^t \geqq \xi^{t_1}$ mod 0 ha $t_1 < t$.

2. $\prod_{-\infty}^{\infty} \xi^t = \varepsilon$ mod 0.

3. $\bigcap_{-\infty}^{\infty} \xi^t = \nu$ mod 0.

A ζ^0 felbontásnak megfelelő σ-algebrát jelöljük $\mathfrak{M}(\zeta^0)$-al. Az 1–3. tulajdonságokból következnek ezen σ-algebrák megfelelő tulajdonságai:

1′. $S_t \mathfrak{M}(\xi^0) = \mathfrak{M}(\xi^t) \supseteqq \mathfrak{M}(\xi^{t_1})$, ha $t_1 < t$.

2′. $\bigvee_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{M}(\xi^t) = \mathfrak{M}$.

3′. $\bigwedge_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{M}(\xi^t) = \mathfrak{N}$.

Megfordítva, az 1′–3′. tulajdonságokból következnek az 1–3. tulajdonságok. Legyen M az $x(\tau)$ valós, stacionáris, sztochasztikus folyamat t realizációinak a tere és az $\{S_t\}$ csoportot értelmezzük mint eltolást, azaz

$$x'(\tau) = S_t x(\tau) = x(t+\tau).$$

Ha $\mathfrak{M}^0 = \mathfrak{M}(\zeta^0)$ az $\{x(\tau) \in \Gamma\}$ alakú mérhető halmazok által származtatott σ-algebra, ahol Γ átfutja a valós számegyenes összes *Borel*-halmazait, míg τ az összes negatív számokat, akkor $\mathfrak{M}^0$ eleget tesz az 1′. és 2′. feltételeknek. Ha $\mathfrak{M}^0$ eleget tesz 3′.-nek is, a sztochasztikus folyamatot regulárisnak szokás nevezni. Ily módon a K-folyamatok elmélete szoros kapcsolatban van a reguláris stacionárius sztochasztikus folyamatok elméletével.

Ez a magyarázata annak, hogy bizonyos K-folyamatokra igazak a centrális határeloszlástételek. Pontos endomorfizmusok esetén erre igen szép példát nyújt IBRAHIMOV [3*] cikkében, ahol lánctörtekre bizonyít normális eloszláshoz való tartást. Geodétikus folyamatokra SZINAJ bizonyított hasonló tételt disszertációjában (lásd még [8*]). Ezek az eredmények egy olyan kutatási területre vezetnek, melyet szintén a legutóbbi időkben kezdtek el igen aktívan vizsgálni (lásd ROSENBLATT [9*], VOLKONSZKIJ–ROZANOV [10*]). Azokról a kutatásokról van szó, melyeknek célja effektív módszerek keresése a centrális határeloszlástétel érvényességének kiterjesztésére, nem független megfigyelési véletlen valószínűségi változó sorozatok esetére (általánosabban folyamatok esetére).

KIEGÉSZÍTŐ IRODALOM

[1*] P.R. HALMOS: Recent progress in ergodic theory, *Bulletin of the Amer. Math. Soc.*, **67** (1961), 70–80.
Orosz fordítása: Математика, **6** (1962), 17–27.

[2*] В. А. Рохлин: Об энтропии автоморфизма компактной коммутативной группы, Теория вероят. и ее прим. **6** (1961) 351—352.

[3*] И. А. Ибрагимов: Одна теорема из метрической теории цепных дробей, Вестник Л. Г. У. **1** (1961), 13—24.

[4*] А. Л. Генис: Метрические свойства ендоморфизмов n-мерного тора, Д. А. Н. **138** (1961), 991—993.

[5*] Я. Г. Синай: Динамические системы со счетнократным лебеговским спектром, I. Известия А. Н. сер. мат. **25** (1961) 899—924.

[6*] В. А. Рохлин—Я. Г. Синай: Построениеисвойства инвариантных измеримыхразбиения, Д. А. Н. **141** (1961) 1038—1041.

[7*] Л. М., Абрамов—В. А. Рохлин: Энтропия косово произведения преобразований с инвариантной мерой, Вестник Л. Г. У. **7** (1962), 7—13.

[8*] Я. Г. Синай: О предельных теоремах для стационарных процессов, Теория вероятностей и ее применения, **7** (1962) 213—219.

[9*] M. ROSENBLATT: A central limit theorem and a strong mixing condition, *Proc. Nat. Acad. Sci. Wash.* **42** (1956) 43–47.

[10*] В. А. Волконский, Ю. А. Розанов: Некоторые предельные теоремы для случайных функций, Теория вероятностей и ее применения **4** (1959) 186--207.

[11*] Л. М. Абрамов: Метрические автоморфизмы с квазидискретным епектром. Изв А. Н. СССР сер. Мат. **26** (1962) 513—530.

(Beérkezett: 1962. IX. 3)

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK

FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

Kutató fizikusok számára önálló eredményeket tartalmazó és összefoglaló jellegű fizikai, csillagászati dolgozatokat, könyvismertetéseket, laboratóriumi fogásokat és ma már klasszikussá vált dolgozatokat közöl hazai és külföldi szerzőktől.

Évenként 1 kötet (kb. 36 ív) jelenik meg 6 számban. A folyóirat előfizetési ára kötetenként, azaz évenként 42 forint, külföldi címre 60 forint.

Belföldi megrendeléseket az *Akadémiai Kiadó*, Budapest, V., Alkotmány utca 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46) teljesít.

Külföldi megrendelések

a „*Kultúra*" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.